

# Тема 9 Перемещение в упругой системе при произвольной нагрузке

## Линейные и угловые перемещения балки

Под действием внешних сил, расположенных в силовой плоскости, проходящей через ось симметрии поперечного сечения прямой балки, ее ось искривляется в той же плоскости; при этом точки оси перемещаются (рис. 9.1). Напомним, что изогнутая ось балки называется *упругой линией*.

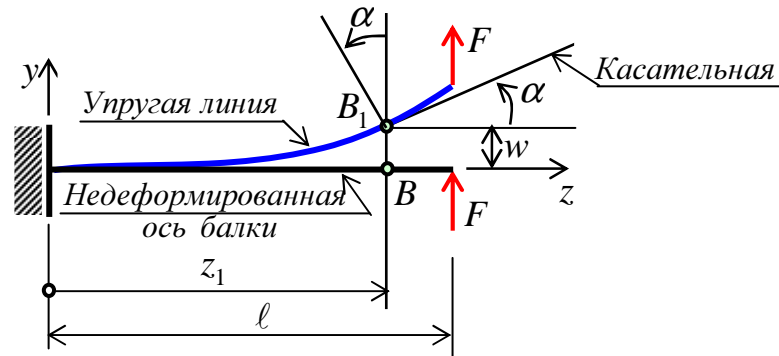


Рис. 9.1

Рассмотрим произвольное поперечное сечение  $B$ , соответствующее одноименной точке на оси балки и отстоящей от начала координат на расстоянии  $z_1$ .

Перемещение центра тяжести сечения  $B$  по направлению перпендикулярному к недеформированной оси балки (вдоль оси  $y - BB_1$ ) будем называть *прогибом* балки в этом сечении и обозначать как  $w$  ( $w = BB_1$ ). На рис. 9.1 прогиб показан положительным.

Смещение центра тяжести сечения  $B$  по горизонтали  $u$  (вдоль оси  $z$ ) будем считать весьма малым по сравнению с прогибом и поэтому при расчетах его не учитывать ( $u \ll w$ ).

Угол поворота сечения  $B_1$  обозначим как  $\alpha$ , который вследствие гипотезы плоских сечений оказывается равным углу наклона между касательной, проведенной к упругой линии, и недеформированной осью балки, и в силу малости  $\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = dw/dz$ .

Прогиб  $w$  и угол поворота  $\alpha$  будем считать новыми характеристиками происходящей деформации.

Новые характеристики деформации балки  $w$  и  $\alpha$  являются переменными, зависящими от координаты сечения  $z_1$  и позволяют количественно оценить искажения формы конструкции при действии внешних сил при изгибе.

Часто прогибы называют *линейными перемещениями* оси балки, а углы поворота – *угловыми перемещениями*.

## Дифференциальное уравнение упругой линии

Ранее было установлено, что мерой деформации стержня при прямом чистом изгибе является кривизна нейтрального слоя

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}.$$

С достаточной для инженерных расчетов точностью этим тезисом можно пользоваться и в случае прямого поперечного изгиба стержня. Тогда возникает задача составления уравнения для функции прогиба по известному закону изменения ее кривизны.

Воспользуемся известным из дифференциальной геометрии выражением для кривизны, в прямоугольных декартовых координатах ( $yOz$ ):

$$K = \frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2 w / dz^2}{\sqrt{[1 + (dw/dz)^2]^3}}.$$

Сравнивая две последние формулы, получаем

$$\frac{M_x}{E \cdot I_x} = \pm \frac{d^2 w / dz^2}{\sqrt{[1 + (dw/dz)^2]^3}}.$$

Это точное нелинейное дифференциальное уравнение упругой линии. Однако, учитывая, что в инженерной практике применяются достаточно жесткие балки, для которых наибольший прогиб  $w_{\max}$  мал по сравнению с длиной  $\ell$  ( $w_{\max}/\ell \ll 1$ ), а первая производная от прогиба имеет порядок

$$\frac{dw}{dz} = \operatorname{tg} \alpha \approx \frac{w}{\ell},$$

и, следовательно, величиной  $(dw/dz)^2 \ll 1$ , стоящей в знаменателе точного дифференциального уравнения упругой линии, можно пренебречь по сравнению с единицей.

Тогда получим следующее линейное дифференциальное уравнение упругой линии

$$\frac{M_x}{E \cdot I_x} = \pm \frac{d^2 w}{dz^2}.$$

Это приближенное дифференциальное уравнение, описывающее малые прогибы балки, иногда называют линеаризованным уравнением упругой линии.

Выбор знака определяется принятой системой координат. Для системы координат, показанной на рис. 9.2, имеем одинаковые знаки для момента  $M_x$  и кривизны  $K \approx d^2 w / dz^2$ . Следовательно, дифференциальное уравнение упругой линии будет иметь следующий вид

$$\frac{M_x}{E \cdot I_x} = \frac{d^2 w}{dz^2}.$$

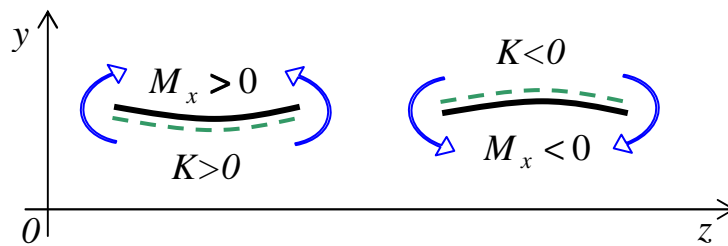


Рис. 9.2

Для системы координат, принятой на рис. 9.3, имеем разные знаки для момента  $M_x$  и кривизны  $K \approx d^2w/dz^2$ . Следовательно, в этом случае будет иметь

$$\frac{M_x}{E \cdot I_x} = -\frac{d^2w}{dz^2}.$$

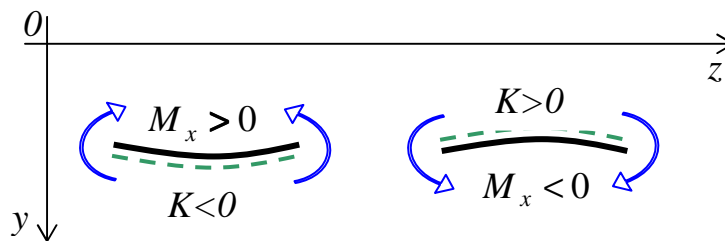


Рис. 9.3

В дальнейшем будем пользоваться системой координат, показанной на рис. 9.2, и дифференциальным уравнением упругой линии в виде

$$M_x = E \cdot I_x \cdot \frac{d^2w}{dz^2}.$$

### Метод непосредственного интегрирования

Решение уравнения получаем путем двукратного почленного интегрирования (метод непосредственного интегрирования). При первом интегрировании получаем выражение

$$E \cdot I_x \cdot \frac{dw}{dz} = E \cdot I_x \cdot \alpha = \int M_x \cdot dz + C,$$

которое дает также закон изменения углов поворота поперечных сечений по длине балки.

Повторным интегрированием получаем функцию прогиба

$$E \cdot I_x \cdot w = \int dz \int M_x \cdot dz + C \cdot z + D,$$

где постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  находятся из граничных условий.

Рассмотрим несколько характерных примеров определения перемещений при изгибе.

Пример 1. Рассмотрим консоль – балку, жестко заделанную одним концом, свободную на другом конце и нагруженную силой  $F$  (рис. 9.4). Найдем перемещения точки приложения силы  $F$  ( $w_c$  и  $\alpha_c$ ).

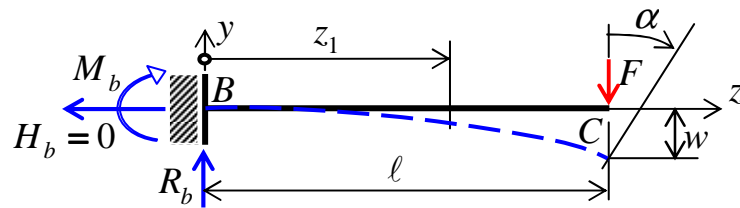


Рис. 9.4

Итак, имеем

$$\frac{M_x}{E \cdot I_x} = \frac{d^2 w}{dz^2}, \quad M_x = F \cdot z_1 - F \cdot \ell = F \cdot (z_1 - \ell), \quad \alpha = \frac{dw}{dz} = \frac{F}{E \cdot I_x} \cdot \left( \frac{z_1^2}{2} - \ell \cdot z_1 \right) + C,$$

$$w = \frac{F}{E \cdot I_x} \cdot \left( \frac{z_1^3}{6} - \ell \cdot \frac{z_1^2}{2} \right) + C \cdot z + D,$$

со следующими двумя граничными условиями (условия, накладываемые на прогиб и угол поворота сечения, получили название *кинематических граничных условий*):

при  $z = 0$   $w(0) = 0$  и  $\alpha(0) = 0$ .

Отсюда  $C = 0$ ,  $D = 0$  и

$$\alpha(\ell) = \frac{F}{E \cdot I_x} \cdot \left( \frac{\ell^2}{2} - \ell \cdot \ell \right) = -\frac{F \cdot \ell^2}{2 \cdot E \cdot I_x}, \quad w(\ell) = \frac{F}{E \cdot I_x} \cdot \left( \frac{\ell^3}{6} - \ell \cdot \frac{\ell^2}{2} \right) = -\frac{F \cdot \ell^3}{3 \cdot E \cdot I_x}.$$

Отрицательные знаки перемещений говорят о том, что центр тяжести сечения перемещается вниз и сечение поворачивается по часовой стрелке.

Пример 2. Рассмотрим балку, шарнирно опертую по концам и нагруженную силой  $F$  в пролете (рис. 9.5). Найдем перемещение точки приложения силы  $F$  ( $w_k$ ) и угол поворота сечения  $B$ .

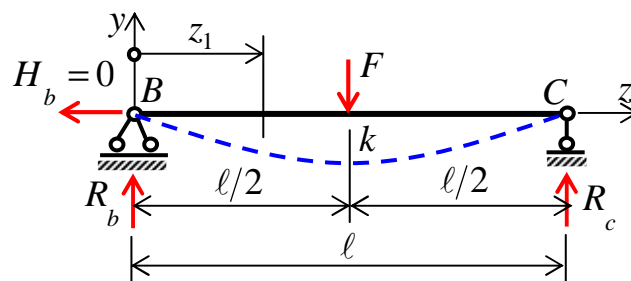


Рис. 9.5

После двукратного почленного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии имеем

$$\frac{M_x}{E \cdot I_x} = \frac{d^2 w}{dz^2}, \quad M_x = \frac{F}{2} \cdot z_1, \quad \alpha = \frac{dw}{dz} = \frac{F}{2 \cdot E \cdot I_x} \cdot \frac{z_1^2}{2} + C = \frac{F}{4 \cdot E \cdot I_x} \cdot z_1^2 + C,$$

$$w = \frac{F}{4 \cdot E \cdot I_x} \cdot \frac{z_1^3}{3} + C \cdot z + D = \frac{F}{12 \cdot E \cdot I_x} \cdot z_1^3 + C \cdot z + D.$$

Постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  находим из двух кинематических граничных условий:

при  $z = 0$   $w(0) = 0$  и вследствие симметрии при  $z = \ell/2$  имеем  $\alpha(\ell/2) = 0$ . Отсюда из  $w(0) = 0$  вытекает  $D = 0$ , а из  $\alpha(\ell/2) = 0$

$$\alpha(\ell/2) = \frac{F}{4 \cdot E \cdot I_x} \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + C = 0, \quad C = -\frac{F \cdot \ell^2}{16 \cdot E \cdot I_x}.$$

Таким образом, искомые перемещения будут равны

$$w(\ell/2) = \frac{F}{12 \cdot E \cdot I_x} \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^3 + \left(-\frac{F \cdot \ell^2}{16 \cdot E \cdot I_x}\right) \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{F \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot I_x} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{F \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot I_x},$$

$$\alpha(0) = C = -\frac{F \cdot \ell^2}{16 \cdot E \cdot I_x}.$$

Обратим внимание на физический смысл постоянных интегрирования  $C = E \cdot I_x \cdot \alpha_0$  и  $D = E \cdot I_x \cdot w_0$ . Они связаны с углом поворота и прогибом в начале координат.

Простота решения рассмотренных задач объясняется тем, что в обоих случаях был всего лишь один силовой участок. Если участков два и больше, то метод непосредственного интегрирования становится весьма трудоемким и по этой причине для определения перемещений применяются другие методы, которые рассматриваются в более полных курсах по сопротивлению материалов.

### Простые статически неопределимые балки

Во всех приведенных выше примерах функция изгибающего момента  $M_x(z)$  предполагалась известной, что возможно лишь для статически определимых балок.

При расчете статически неопределимых балок дифференциальное уравнение

$$\frac{M_x}{E \cdot I_x} = \frac{d^2 w}{dz^2}$$

непригодно, так как оно содержит неизвестный изгибающий момент  $M_x$ . Попробуем это уравнение преобразовать. Для этого, с его учетом, еще раз перепишем дифференциальные зависимости при изгибе:

$$\frac{dw}{dz} = \alpha,$$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{M_x}{E \cdot I_x},$$

$$\frac{d^3 w}{dz^3} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \frac{dM_x}{dz} = \frac{Q_y}{E \cdot I_x},$$

$$\frac{d^4 w}{dz^4} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \frac{dQ_y}{dz} = -\frac{q}{E \cdot I_x}.$$

Каждая производная имеет четкий физический смысл и четкую математическую запись. А в дифференциальном уравнении упругой линии, записанном в виде

$$\frac{d^4 w}{dz^4} = -\frac{q}{E \cdot I_x}$$

нагрузка  $q$  известна. При интегрировании уравнения необходимо задать четыре граничных условия (по два на каждом конце балки) в том числе так называемые силовые граничные условия – условия, накладываемые на силовые величины (изгибающий момент и поперечную силу), которые выражаются через производные от прогиба.

Рассмотрим два характерных примера определения перемещений в простых статически неопределимых балках при изгибе.

Пример 3. Имеем балку, жестко заделанную в левом концевом сечении и свободно опертую на другом конце, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$  (рис. 9.6). Найдем угол поворота сечения С ( $\alpha_c$ ).

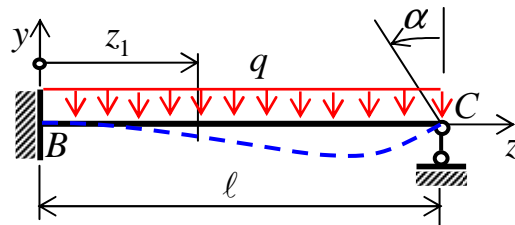


Рис. 9.6

В нашем случае имеем при  $z = 0$   $w(0) = 0$  и  $\alpha(0) = 0$ , при  $z = l$   $w(l) = 0$  и  $M_x(l) = 0$ .

Удовлетворяя дифференциальные зависимости при изгибе граничным условиям:

$$\frac{d^4 w}{dz^4} = -\frac{q}{E \cdot I_x}, \quad \frac{d^3 w}{dz^3} = -\frac{q}{E \cdot I_x} \cdot \int dz + C = -\frac{q \cdot z}{E \cdot I_x} + C,$$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{q \cdot z^2}{2 \cdot E \cdot I_x} + C \cdot z + D, \quad \frac{dw}{dz} = -\frac{q \cdot z^3}{6 \cdot E \cdot I_x} + C \cdot \frac{z^2}{2} + D \cdot z + G,$$

$$w = -\frac{q \cdot z^4}{24 \cdot E \cdot I_x} + C \cdot \frac{z^3}{6} + D \cdot \frac{z^2}{2} + G \cdot z + H,$$

получим  $w(0) = 0$  или  $H = 0$ ,  $\alpha(0) = 0$  или  $G = 0$ ,  $w(\ell) = 0$  или  $0 = -\frac{q \cdot \ell^4}{24 \cdot E \cdot I_x} + C \cdot \frac{\ell^3}{6} + D \cdot \frac{\ell^2}{2}$  или  $0 = -\frac{q \cdot \ell^2}{12 \cdot E \cdot I_x} + C \cdot \frac{\ell}{3} + D$ ,  $M_x(\ell) = 0$  или  $\frac{M_x(\ell)}{E \cdot I_x} = \frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{q \cdot \ell^2}{2 \cdot E \cdot I_x} + C \cdot \ell + D = 0$ .

Решая последние два уравнения относительно постоянных интегрирования  $C$  и  $D$  получим

$$\begin{cases} -\frac{q \cdot \ell^2}{12 \cdot E \cdot I_x} + C \cdot \frac{\ell}{3} + D = 0 \\ -\frac{q \cdot \ell^2}{2 \cdot E \cdot I_x} + C \cdot \ell + D = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} C = -\frac{5 \cdot q \cdot \ell}{8 \cdot E \cdot I_x} \\ D = -\frac{q \cdot \ell^2}{8 \cdot E \cdot I_x} \end{cases}.$$

Тогда, угол поворота сечения  $C$  ( $\alpha_c$ ) будет равен

$$\alpha_c = \frac{dw}{dz} = -\frac{q \cdot \ell^3}{6 \cdot E \cdot I_x} + \left(\frac{5 \cdot q \cdot \ell}{8 \cdot E \cdot I_x}\right) \cdot \frac{\ell^2}{2} + \left(-\frac{q \cdot \ell^2}{8 \cdot E \cdot I_x}\right) \cdot \ell = \frac{q \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot I_x}.$$

Пример 4. Рассмотрим балку, жестко заделанную в левом концевом сечении и свободно опертую на другом конце, нагруженную как показано на рис. 9.7. Найдем угол поворота сечения  $C$  ( $\alpha_c$ ).

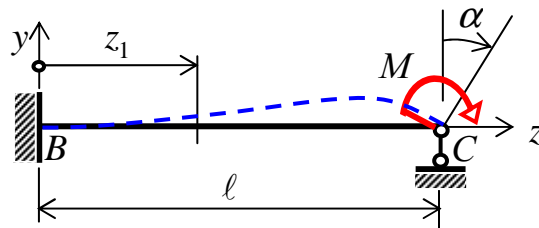


Рис. 9.7

Граничные условия остаются прежними: при  $z = 0$   $w(0) = 0$  и  $\alpha(0) = 0$ , при  $z = \ell$   $w(\ell) = 0$ . Изменится только граничное силовое условие – при  $z = \ell$   $M_x(\ell) = -M$ .

Удовлетворяя дифференциальные зависимости при изгибе граничным условиям и учитывая, что  $q = 0$ ,

$$E \cdot I_x \cdot \frac{d^4 w}{dz^4} = 0, \quad E \cdot I_x \cdot \frac{d^3 w}{dz^3} = C, \quad E \cdot I_x \cdot \frac{d^2 w}{dz^2} = C \cdot z + D,$$

$$E \cdot I_x \cdot \alpha = E \cdot I_x \cdot \frac{dw}{dz} = C \cdot \frac{z^2}{2} + D \cdot z + G, \quad E \cdot I_x \cdot w = C \cdot \frac{z^3}{6} + D \cdot \frac{z^2}{2} + G \cdot z + H,$$

получим  $w(0) = 0$  или  $H = 0$ ,  $\alpha(0) = 0$  или  $G = 0$ ,  $w(\ell) = 0$  или

$$0 = C \cdot \frac{\ell^3}{6} + D \cdot \frac{\ell^2}{2} \quad \text{или} \quad 0 = C \cdot \frac{\ell}{3} + D, \quad M_x(\ell) = -M \quad \text{или}$$

$$M_x = E \cdot I_x \cdot \frac{d^2 w}{dz^2}, \quad E \cdot I_x \cdot \frac{d^2 w}{dz^2} = C \cdot z + D, \quad C \cdot \ell + D = -M.$$

Решая последние два уравнения относительно постоянных интегрирования  $C$  и  $D$  получим

$$\begin{cases} C \cdot \frac{\ell}{3} + D = 0 \\ C \cdot \ell + D = -M \end{cases}, \quad \begin{cases} C = -\frac{3 \cdot M}{2 \cdot \ell} \\ D = \frac{M}{2} \end{cases}.$$

Тогда, угол поворота сечения  $C$  ( $\alpha_c$ ) будет равен

$$E \cdot I_x \cdot \alpha_c = \left(-\frac{3 \cdot M}{2 \cdot \ell}\right) \cdot \frac{\ell^2}{2} + \left(\frac{M}{2}\right) \cdot \ell = -\frac{M \cdot \ell}{4}, \quad \alpha_c = -\frac{M \cdot \ell}{4 \cdot E \cdot I_x}.$$